PROBLEM FORM

BMO 2004 **Country Code: ROM**
BULGARIA **Version: Romanian**

Plevna, 7 Mai, 2004

1. Şirul de numere reale $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ satisface relaţia
$$a_{m+n} + a_{m-n} - m + n - 1 = \frac{1}{2}(a_{2m} + a_{2n}),$$
pentru orice numere naturale m şi n, $m \geq n$.
Dacă $a_1 = 3$, aflaţi a_{2004}.

2. Rezolvaţi în mulţimea numerelor prime ecuaţia
$$x^y - y^x = xy^2 - 19.$$

3. Fie O un punct interior triunghiului ascuţitunghic ABC. Cercurile centrate în mijloacele laturilor triunghiului şi care trec prin O, se intersectează a doua oară în K, L şi M.
Demonstraţi că O este centrul cercului înscris în triunghiul KLM dacă şi numai dacă O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC.

4. O mulţime finită de drepte, oricare trei neconcurente, partiţionează planul într-un număr de regiuni. Două regiuni se numesc "vecine" dacă frontierele lor au în comun mai mult decât un segment nedegenerat.
În fiecare regiune trebuie scris un număr întreg astfel încât:
(i) produsul numerelor scrise în oricare două regiuni vecine este strict mai mic decât suma lor;
(ii) pentru fiecare dintre dreptele date, suma numerelor scrise în regiunile aflate de aceeaşi parte a ei este egală cu 0.
Demonstraţi că acesta este posibil dacă şi numai dacă nu toate dreptele sunt paralele.

Timp de lucru: 4 ore şi 30 minute.
Fiecare problemă este notată cu 10 puncte.